



# Le modèle en détail: Les équations

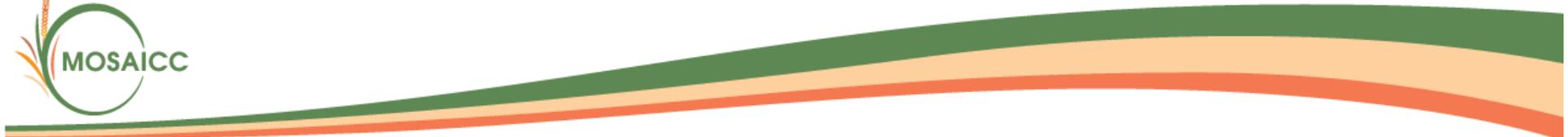
Lecture 3

Onno Kuik



# Overview

- Données, paramètres, variables
- Prix
- Production
- Export/import
- Revenu
- Consommation
- Contraintes du système
- Fermeture



# Sets

$a \in A$	Activitiés
$c \in C$	Produits
$c \in CT \subset C$	Produits de services de transaction (les marges commerciales)
$f \in F$	Facteurs de production
$i \in INS$	Institutions (nationales et ROW)
$i \in INSD \subset INS$	Institutions nationales (ménages et gouvernement)
$i \in INSDNG \subset INSD$	Institutions non gouvernementales nationales
$h \in H \subset INSDNG$	Ménages
$t \in T$	Temps

# Script

```
activities_nbr = 12
```

```
@#define activities = ["ABAR_FAV", "ABAR_DEF", "AWHT_FAV", "AWHT_DEF", "AOLV_FAV", "AOLV_DEF",  
"ATOM_FAV", "ATOM_DEF", "ASUG", "AAGR", "AFOO", "AOTH"]
```

```
commodities_nbr = 8
```

```
@#define commodities = ["CBAR", "CWHT", "COLV", "CTOM", "CSUG", "CAGR", "CFOO", "COTH"]
```

```
factorsprod_nbr = 3
```

```
@#define capital = ["CAP"]
```

```
@#define factorsprod_other = ["LAB", "LAN"]
```

```
@#define factorsprod = capital + factorsprod_other
```

```
institutions_nbr = 3
```

```
households_nbr = 1
```

```
@#define dh_institutions = ["HSH"]
```

```
@#define dg_institutions = ["GOV"]
```

```
@#define f_institutions = ["ROW"]
```

```
@#define d_institutions = dh_institutions+dg_institutions
```

```
@#define institutions = d_institutions+f_institutions
```



# Parameters

## Exemples:

$ta_a$  Le taux d'imposition pour l'activité a

$te_c$  Taux tarrifaire d'exportation

$tf_f$  Taux d'imposition directe pour le facteur f

$tins_i$  Taux d'imposition directe pour l'institution i

$tm_c$  Taux tarrifaire à l'importation

$\alpha_c^{ac}$  Paramètre de décalage de la fonction d'agrégation interne

$\alpha_c^q$  Paramètre de décalage de la fonction d'Armington

$\alpha_c^t$  Paramètre de décalage de la fonction CET

$\alpha_a^{va}$  Paramètre d'efficacité dans la fonction de valeur ajoutée

@#for a in activities

iva\_@{a} inta\_@{a} epsilon\_va\_@{a} ta\_@{a}

tva\_@{a} lambda\_pa\_@{a} mu\_pa\_ba\_@{a}

mu\_pa\_fo\_@{a}

upsilon\_@{capital}\_@{a} psy\_@{capital}\_@{a}

@#for f in factorsprod

phi\_va\_@{f}\_@{a}

@#endfor

@#for c in commodities

ica\_@{c}\_@{a} theta\_@{a}\_@{c}

inv\_@{c}\_@{a}

phi\_ac\_@{a}\_@{c}

@#endfor

@#endfor



# Variables

## Variables exogènes

FSAV	L'épargne étrangère (FCU)
$QFS_f$	Dotation du facteur f

## Variables endogènes

### Variables de prix – Commencent avec P

$PA_a$	<b>Le prix de production de l'activité a</b>
PC	Indice des prix à la consommation
$PDD_c$	Prix de la demande pour les matières premières produites et vendues localement
$PDS_c$	Prix d'approvisionnement de marchandises produites et vendues localement

@#for a in activities

.

.

$PA_{@{a}}$  // Output price of activity a

.

.

@#endfor

# Variables

## Variables quantitatives – Commenant avec Q

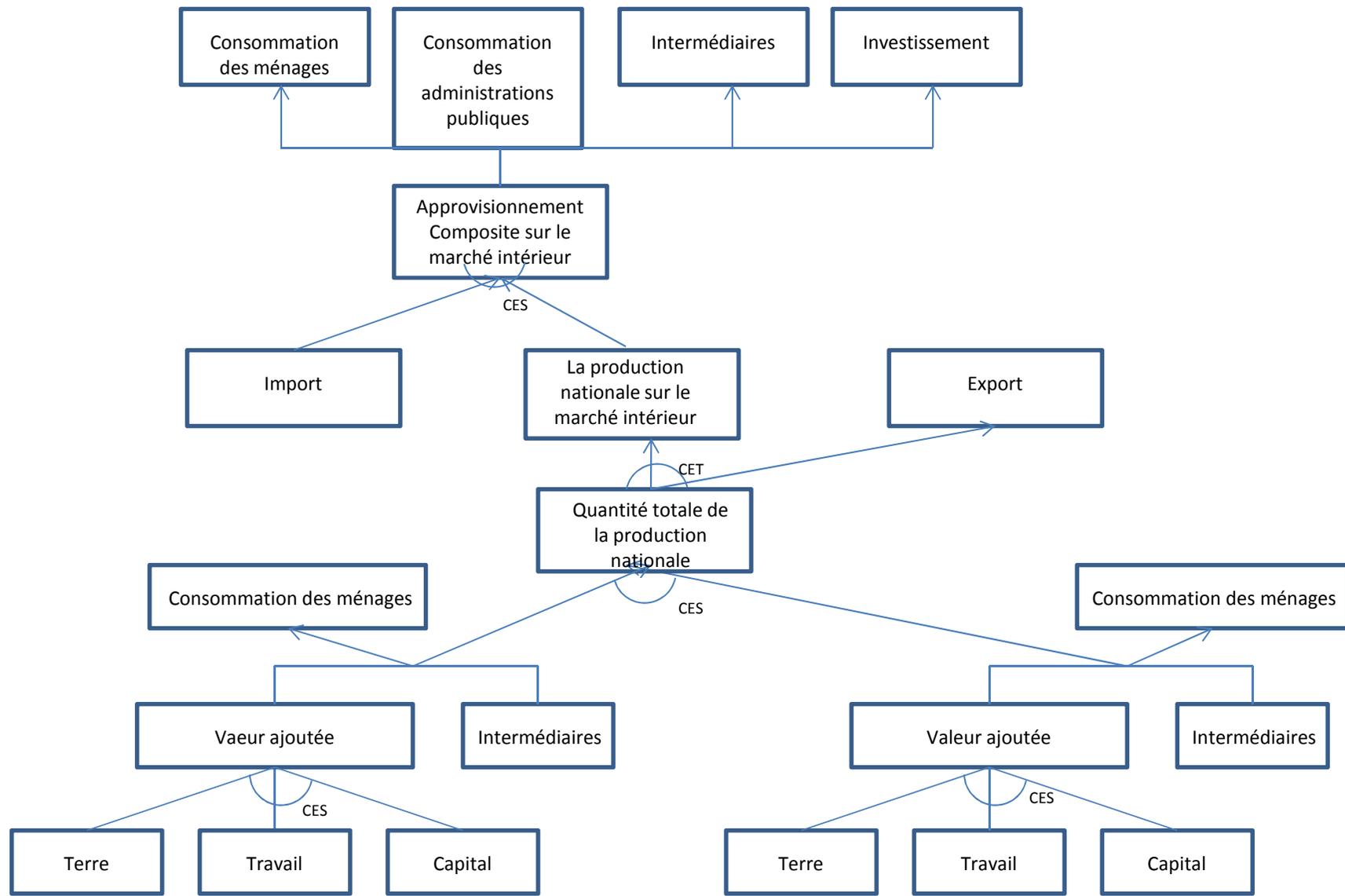
$QA_a$	Le niveau d'activité domestique a (quantité de production produite par l'activité a)
$QD_c$	Quantité de la production domestique vendue localement
$QE_c$	Quantité exportée
$QF_{f,a}$	Quantité demandée du facteur f par l'activité a

## Variables de revenu – Commenant avec Y

$YF_f$	Revenu du facteur f
$YG$	Recettes publiques
$YIF_{if}$	Les revenus du facteur f à l'institution nationale i
$Yi_i$	Revenu de l'institution i

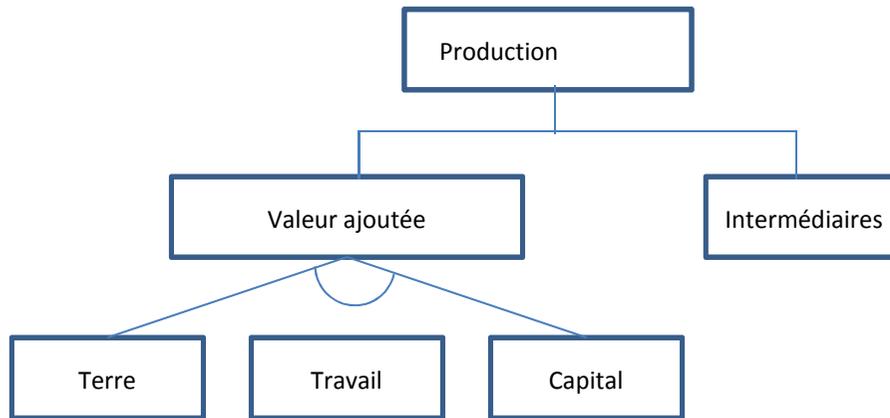
Et quelques autres variables





Activité 1

Activité 2



# Production

Le plus haut niveau de la fonction de production est Leontief

```

@#for a in activities
    QVA_@{a}=iva_@{a}*QA_@{a};
                                     //***      Eq. 1
@#endfor

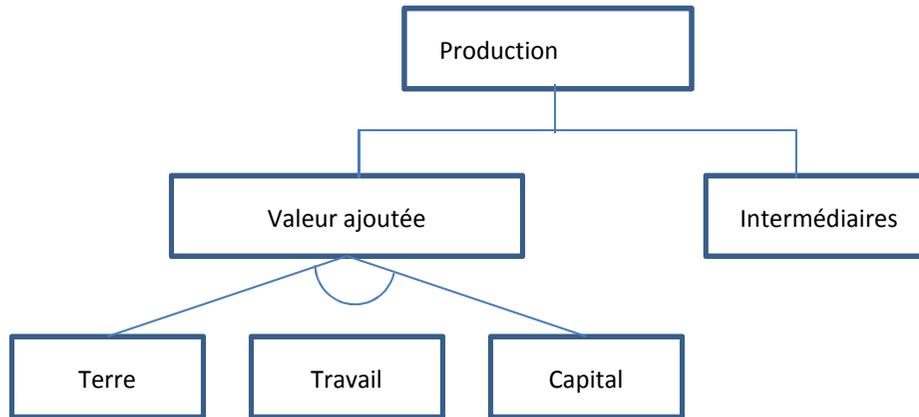
@#for a in activities
    QINTA_@{a}=inta_@{a}*QA_@{a};
                                     //***      Eq. 2
@#endfor
  
```

$$QVA_a = iva_a \cdot QA_a \quad (1)$$

$$QINTA_a = inta_a \cdot QA_a \quad (2)$$

Les quantités de valeur ajoutée globale et les intrants intermédiaires sont une fraction constante du niveau d'activité

# Production



## Factor demand

Le facteur demande résulte de la maximisation du profit en supposant une fonction de production CES

$$\text{Max} \left\{ PVA_a \cdot (1 - tva_a) \cdot QVA_a - \sum_f PQF_{f,a} QF_{f,a} \right\} \text{ s.t } QVA_a = \alpha_a^{va} \cdot \left( \sum_f \delta_{f,a}^{va} \cdot QF_{f,a}^{\rho_a^{va}} \right)^{\frac{1}{\rho_a^{va}}}$$

The elasticity of substitution  $\epsilon_a^{va} = \frac{1}{\rho_a^{va}-1}$  is negative.

The F.O.C. for factor demand are:

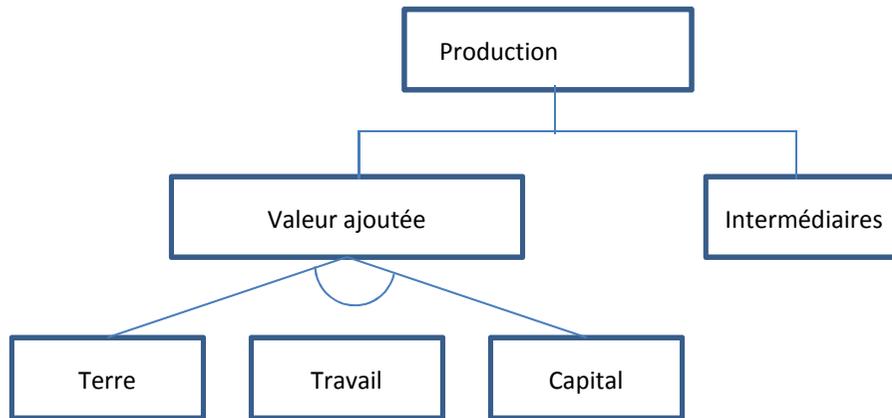
```

@#for a in activities
  @#for f in factorsprod
    SHOCK_{a}*QF_{f}_{a}/QVA_{a}=phi_va_{a}*
    @_{f}_{a}*(PQF_{f}_{a}/(PVA_{a}*(tva_{a}
    )))^(epsilon__va_{a});
  @#endfor
@#endfor
  
```

$$\frac{QF_{f,a}}{QVA_a} = \varphi_{f,a}^{va} \left( \frac{PQF_{f,a}}{PVA_a \cdot (1 - tva_a)} \right)^{\epsilon_a^{va}} \quad (3)$$

$$\text{with } \varphi_{f,a}^{va} = (\alpha_a^{va})^{-\rho_a^{va}} \cdot (\delta_{f,a}^{va})^{-1}$$

“marginal cost of factor  $f$  in activity  $a$  is equal to marginal revenue”



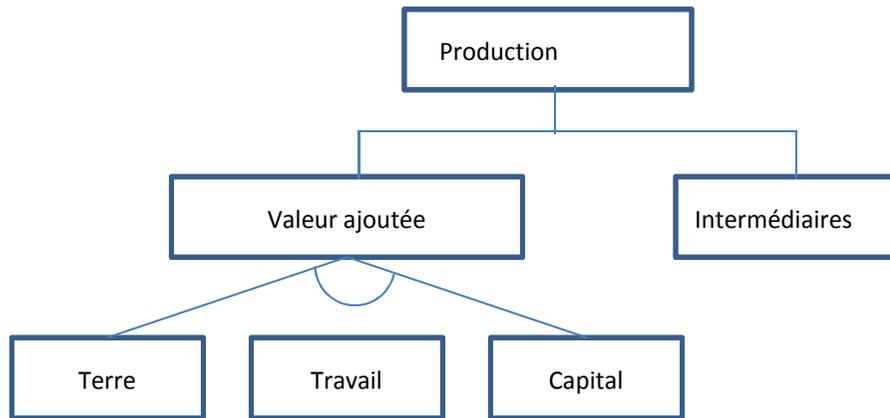
# Production

## Demande d'intrants intermediaires

$$QINT_{c,a} = ica_{c,a} \cdot QINTA_a \quad (4)$$

```

@#for a in activities
  @#for c in commodities
    QINT_@{c}_@{a} = ica_@{c}_@{a}*QINTA_@{a};
  @#endfor
@#endfor
  
```



# Production

```

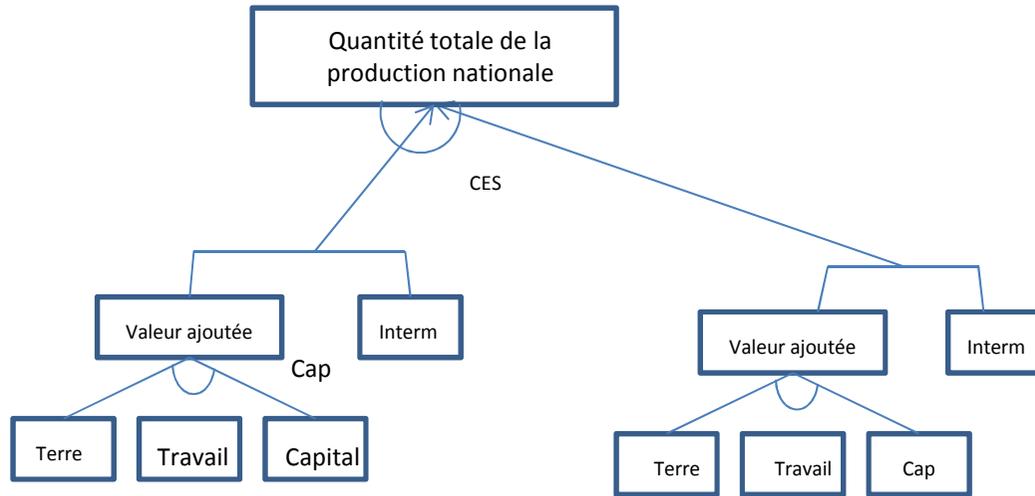
@#for a in activities
  @#for c in commodities
    QXAC_@{a}_@{c}
    @#for i in dh_institutions
      + QHA_@{a}_@{c}_@{i}
    @#endfor
  = theta_@{a}_@{c}*QA_@{a};
@#endfor
@#endfor
  
```

## Production et allocation des produits de base

$$QXAC_{a,c} + \sum_h QHA_{a,c,h} = \theta_{a,c} \cdot QA_a \quad (5)$$

Cette spécification permet qu'une activité produise de multiples produits (bovins> lait, viande). Dans la plupart des cas cependant, chaque activité va produire un seul produit.

# Production



## Aggregation de production

The representative firm maximize the profit from selling its aggregate output of commodity  $c$  from its various activities subject to an aggregate activity to commodity function with imperfect possibility of transformation (CET function):

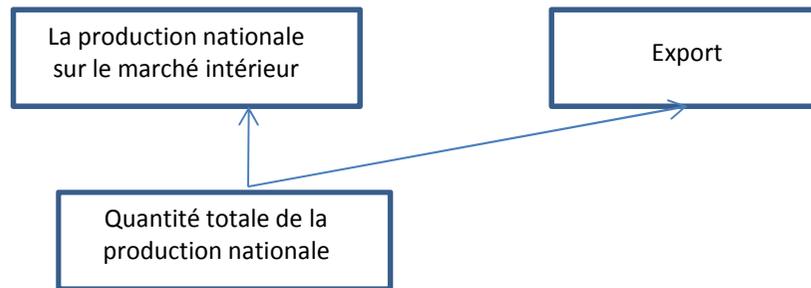
$$\text{Max} \left\{ PX_c \cdot QX_c - \sum_a PXAC_{a,c} \cdot QXAC_{a,c} \right\} \text{ s. t. } QX_c = \alpha_c^{ac} \cdot \left( \sum_a \delta_{a,c}^{ac} \cdot QXAC_{a,c}^{\rho_c^{ac}} \right)^{\frac{1}{\rho_c^{ac}}}$$

The elasticity of substitution  $\varepsilon_c^{ac} = \frac{1}{\rho_c^{ac} - 1}$  is negative.

```
@#for c in commodities
  @#for a in activities
    QXAC_@{a}_@{c}/QX_@{c}=
    phi_ac_@{a}_@{c}*
    (PXAC_@{a}_@{c}/
    PX_@{c})^(epsilon_ac_@{c});
  @#endfor
@#endfor
```

$$\frac{QXAC_{a,c}}{QX_c} = \varphi_{a,c}^{ac} \left( \frac{PXAC_{a,c}}{PX_c} \right)^{\varepsilon_c^{ac}} \quad (6)$$

# Production



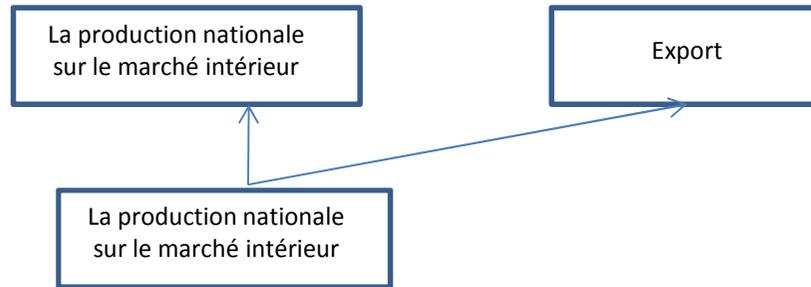
## La production marchande

$$PX_c \cdot QX_c = PDS_c \cdot QD_c + PE_c \cdot QE_c \quad (7)$$

La valeur de la production marchande est égale aux ventes intérieures et aux ventes à l'exportation

```
@#for c in commodities
  PX_{c}*QX_{c} =
  PDS_{c}*QD_{c}+PE_{c}*QE_{c};
@#endfor
```

# Exportations

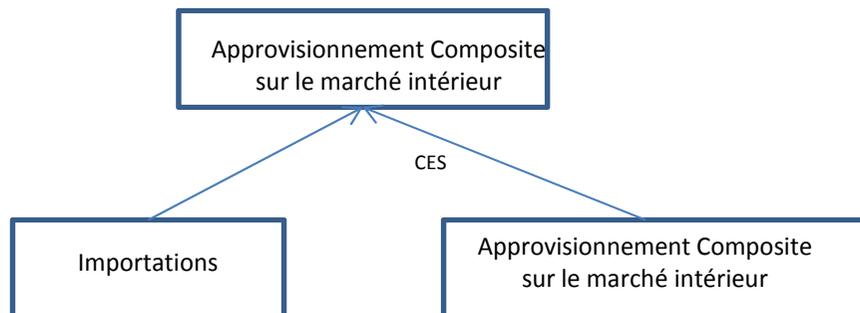


$$\frac{QD_c}{QX_c} = \varphi_c^{ds} \left( \frac{PDS_c}{PX_c} \right)^{\varepsilon_c^t} \quad (8)$$

$$\frac{QE_c}{QX_c} = \varphi_c^e \left( \frac{PE_c}{PX_c} \right)^{\varepsilon_c^t} \quad (9)$$

```
@#for c in commodities
  QD_@{c}/QX_@{c} =
  phi_ds_@{c}*(PDS_@{c}/
  PX_@{c})^(epsilon_t_@{c});
@#endfor
@#for c in commodities
  QE_@{c}/QX_@{c}=
  phi_e_@{c}*(PE_@{c}/
  PX_@{c})^(epsilon_t_@{c});
@#endfor
```

# Importations



$$\frac{QD_c}{QQ_c} = \varphi_c^{dd} \left( \frac{PDD_c}{PQ_c \cdot (1 - tq_c)} \right)^{\varepsilon_c^q} \quad (10)$$

$$\frac{QM_c}{QQ_c} = \varphi_c^m \left( \frac{PM_c}{PQ_c \cdot (1 - tq_c)} \right)^{\varepsilon_c^q} \quad (11)$$

```

@#for c in commodities
  QD_@{c}/QQ_@{c}=
  phi_dd_@{c}*(PDD_@{c}/(PQ_@{c}*(1-tq_@{c})))^(epsilon_q_@{c});
@#endfor
  
```

```

@#for c in commodities
  QM_@{c}/QQ_@{c}=
  phi_m_@{c}*(PM_@{c}/(PQ_@{c}*(1-tq_@{c})))^(epsilon_q_@{c});
@#endfor
  
```

# Revenu

$$YF_f = \sum_a PQF_{f,a} QF_{f,a}$$

$$YF_f = \sum_a [PQF_{f,a} QF_{f,a} (1 - v_{f,a})] \text{ for } f = \text{capital} \quad (12)$$

$$YIF_{i,f} = shif_{i,f} \cdot [(1 - tf_f) \cdot YF_f] \quad (13)$$

$$YI_i = \sum_f YIF_{i,f} + \sum_{i'} TRII_{i,i'} \quad (14)$$

$$TRII_{i,i'} = shii_{i,i'} \cdot (1 - MPS_{i'}) (1 - tins_{i'}) \cdot YI_{i'}$$

$$TRII_{i,gov} = transfr_{i,gov} \cdot PC \quad (15)$$

$$TRII_{i,row} = transfr_{i,row} \cdot EXR$$

# Consommation

La consommation des ménages

Approvisionnement composite sur le marché intérieur

```
@#for h in dh_institutions
  EH_@{h} = YI_@{h}*(1 - MPS_@{h})*(1 - tins_@{h})*(1 - (
    @#for i in institutions
      + shii_@{i}_@{h}
    @#endfor
  ));
@#endfor
```

## Les dépenses de consommation des ménages

$h \in H$

$i \in INS$

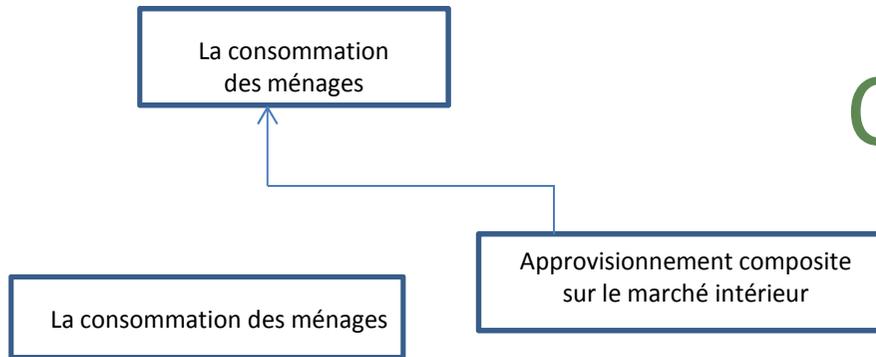
$$EH_h = \left( 1 - \sum_i shii_{i,h} \right) \cdot (1 - MPS_h)(1 - tins_h) \cdot YI_h \quad (16)$$

## Les dépenses de consommation des ménages en produits commercialisés

$$PQ_cQH_{c,h} = PQ_c \cdot \gamma_{c,h}^m + \beta_{c,h}^m \left( EH_h - \sum_{ct} PQ_{ct} \cdot \gamma_{ct,h}^m - \sum_a \sum_{ct} PXAC_{act} \cdot \gamma_{a,ct,h}^h \right) \quad (17)$$

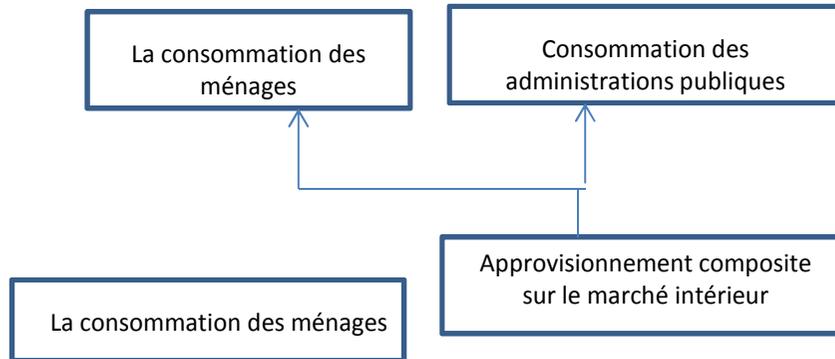


# Consommation



$$\begin{aligned} PXAC_{a,c} QHA_{a,c,h} &= PXAC_{a,c} \cdot \gamma_{a,c,h}^h \\ &+ \beta_{a,c,h}^h \left( EH_h \right. \\ &\left. - \sum_{c'} PQ_{c'} \cdot \gamma_{c',h}^m - \sum_{a'} \sum_{c'} PXAC_{a',c'} \cdot \gamma_{a',c',h}^h \right) \end{aligned} \quad (18)$$

# Consommation



**Recettes publiques**

**Dépenses publiques**

$$\begin{aligned}
 YG = & \sum_{i \in \text{INSDNG}} tins_i \cdot YI_i \\
 & + \sum_f tf_f \cdot YF_f \\
 & + \sum_a tva_a \cdot PVA_a \cdot QVA_a \\
 & + \sum_a ta_a \cdot PA_a \cdot QA_a \\
 & + \sum_c tm_c \cdot pwmc_c \cdot QM_c \cdot EXR \\
 & + \sum_c te_c \cdot pwe_c \cdot QE_c \cdot EXR \\
 & + \sum_c tq_c \cdot PQ_c \cdot QQ_c + YI_{gov}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

$$EG = \sum_c PQ_c \cdot QG_c + \sum_{i \in \text{INS}} TRI_{i,gov}
 \tag{20}$$

# Contraintes du système

**Demande = offre sur le marché du facteur**

$$\sum_a QF_{f,a} = QFS_f \quad (21)$$

**Demande = approvisionnement en matières premières sur le marché**

$$QQ_c = \sum_a QINT_{c,a} + \sum_h QH_{c,h} + QG_c + QINV_c + qdst_c \quad (22)$$

```
@#for f in factorsprod
  @#for a in activities
    + QF_{f}_{a}
  @#endfor
  = QFS_{f};
@#endfor
```

# Contraintes du système

**Solde extérieur: l'épargne étrangère (solde du compte courant en monnaie nationale)**

$$SAV_{row} = \sum_c pwm_c \cdot EXR \cdot QM_c + YI_{row} - \sum_c pwe_c \cdot EXR \cdot QE_c - \sum_{i \in INS} TRII_{i,row} \quad (23)$$

$$SAV_{row} = SAVFC_{row} \cdot EXR$$

**L'épargne intérieure: bilan des finances publiques et de l'épargne des ménages**

$$SAV_{gov} = YG - EG \quad (24)$$

$$SAV_h = MPS_h \cdot (1 - tins_h) \cdot YI_h$$

# Contraintes du système

**Equilibre interne: épargne = investissement**

$$\sum_i SAV_i = \sum_c PQ_c \cdot QINV_c + \sum_c PQ_c \cdot qdst_c - v_{f,a} \cdot PQF_{f,a} \cdot QF_{f,a} + WALRAS \quad (25)$$

*i* refers to all institutions. WALRAS is a variable that should be zero in equilibrium.

$$MPS_i = mps_i \cdot MPS \quad (26)$$

# Prix

## Prix de la valeur ajoutée

$$PVA_a \cdot (1 - tva_a) \cdot QVA_a = \sum_f PQ_{F_{f,a}} Q_{F_{f,a}} \quad (27)$$

## Prix des facteurs de production

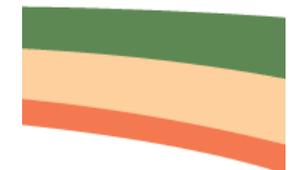
The price of the production factor  $f$  is assumed common across activity which implies the perfect mobility of production factor across activities.

$$PQ_{F_{f,a}} = PQ_{F_f} \quad (28)$$

## Indice des prix à la consommation

$$PC = \sum_c PQ_c \cdot cwts_c \quad (29)$$

With  $cwts_c = \sum_h PQ_c QH_{c,h} / \sum_c \sum_h PQ_c QH_{c,h}$



# Prix

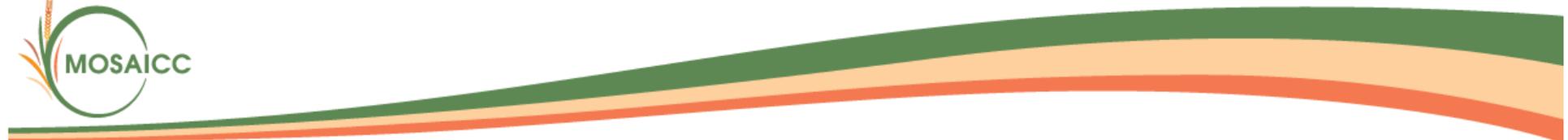
L'indice des prix à la consommation est utilisé comme numéraire:  $PC = 1$

## Prix à l'importation

$$PM_c = pwm_c \cdot (1 + tm_c) \cdot EXR \quad (30)$$

## Prix à l'exportation

$$PE_c = pwe_c \cdot (1 - te_c) \cdot EXR \quad (31)$$



# Prix

## Prix de la demande

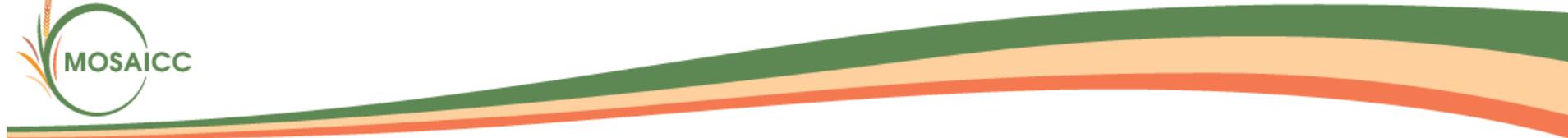
En supposant l'absence de marge commerciale et de service, dans cette version de base du modèle, le prix de la demande pour les produits fabriqués et vendus est égal au prix de l'offre pour les produits de base produits et vendus à l'échelle nationale.

$$PDD_c = PDS_c \quad (32)$$

## Prix des produits de base

$$PQ_c \cdot (1 - tq_c) \cdot QQ_c = PDD_c \cdot QD_c + PM_c \cdot QM_c \quad (33)$$

Absorption: la dépense intérieure totale d'une marchandise à des prix de la demande intérieure.



# Prix

## Prix d'activité

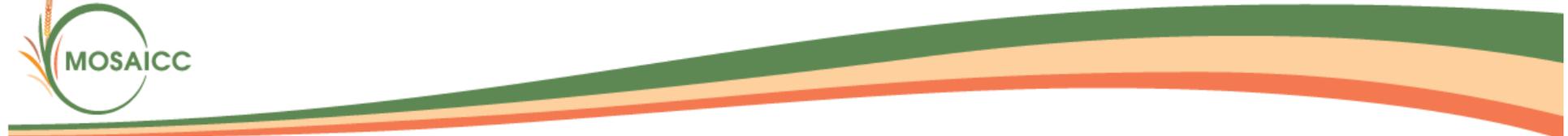
$$PA_a \cdot (1 - ta_a) \cdot QA_a = PVA_a \cdot QVA_a + PINTA_a \cdot QINTA_a \quad (34)$$

## Prix d'activité

$$PA_a = \sum_c PXAC_{a,c} \cdot \theta_{a,c} \quad (35)$$

## Agrégats des prix des intrants intermédiaires

$$PINTA_a = \sum_c PQ_c \cdot ica_{c,a} \quad (36)$$



# Prix

**Prix à la production sur le marché**

$$PX_c \cdot QX_c = \sum_a PXAC_{a,c} \cdot QXAC_{a,c} \quad (37)$$

Et ceci complète le script

# Fermeture

L'existence d'une solution impose l'adoption d'un soi-disant règles de fermeture. En particulier, satisfaire des soldes internes et externes impose certaines contraintes sur le choix de certaines variables endogènes. Nous avons utilisé la règle de fermeture par défaut:

Solde des échanges extérieurs: l'épargne étrangère (déficit du compte courant) est exogène fixe, le taux de change (EXT) est flexible (endogène).

Équilibre interne: Les investissements sont exogène fixe, le taux d'épargne non gouvernementales sont endogènes.

Dans les deux cas, nous aurions pu supposer le contraire. Sans la variable d'écart WALRAS et le choix d'un *numéraire*, l'ensemble de l'équation (1) - (37) constitue un système de  $n$  équations et  $n$  inconnues. Pourtant, le modèle ne peut pas être résolu parce que l'équilibre interne (25) n'est rien d'autre qu'une reformulation des équations d'équilibre offre-demande (22). L'équation (25) peut être supprimée ou bien la variable d'écart supplémentaire WALRAS peut être ajoutée.

# Fermeture

Mais alors le modèle est sous-identifié (le nombre de variables endogènes est supérieur au nombre d'équations). Ceci est résolu en choisissant un prix comme *numéraire*. Ici, nous avons choisi l'indice des prix à la consommation (PC). Une alternative courante dans la littérature est de prendre le taux de change (EXR). L'inclusion des variables WALRAS est un bon moyen de vérifier si l'étalonnage et la spécification du modèle est correcte. Si le modèle est toujours calibré et formulé, WALRAS est toujours égale à zéro (même après un choc).

## MODÈLE DYNAMIQUE SIMPLE

Dans le SDM, la dynamique est exogène:

- $\gamma_{ch}^m$  (revenu indépendant de la demande) augmente au même rythme que la croissance de la population
- $QFS_{labo}$  augmente au même rythme que la croissance de la population (ou la croissance de la population entre 15 et 65 ans)
- Growth in total factor productivity (TFP) in  $\alpha^{va}_a$
- Government spending  $QG_c$  and transfers  $trnsfr_{i,gov}$  grow exogenous
- In the basic version investment  $QINV_c$  grows also exogenously